Teoria ergodyczna
WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład 2

15/10/08

DALSZE PRZYKŁADY, ERGODYCZNOŚĆ

Kilka ważnych przykładów

1. Stacjonarny proces stochastyczny $f_t : \Omega \to \mathbb{R}$. Proces taki można traktować jako układ dynamiczny określony na przestrzeni produktowej $\mathbb{R}^{time}$ (elementy są postaci $x = (x(t))_{t \in time}$), gdzie działanie jest poprzez ,,shift", czyli przesunięcie: $T_s(x)(t) = x(t+s)$. Przejście od procesu do tego modelu jest poprzez odwzorowanie $\omega \mapsto (x_\omega(t))_{t \in time}$ zadane wzorem $x_\omega(t) = f_t(\omega)$. Miara prawdopodobieństwa $\mathcal{P}$ na Ω przenosi się (przez przeciwobraz) na miarę μ na $\mathbb{R}^{time}$. Stacjonarność procesu implikuje, że μ jest niezmiennicza względem przesunięcia o dowlny parametr s.

Ważny jest przypadek szczególny, gdy czas jest dyskretny (dla ustalenia uwagi niech to będzie $\mathbb{Z}$), a wszystkie zmienne losowe f_n przyjmują wartości w zbiorze skończonym Λ (na przykład w $\{0, 1, \ldots, l\}$). Wtedy otrzymamy układ dynamiczny na przestrzeni $\Lambda^{\mathbb{Z}}$ z jedną transformacją generującą, tzw. ,,shiftem" $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ (i odpowiednią miarą niezmienniczą). Układ taki nazywamy *symbolicznym*, lub *procesem o skończonej liczbie stanów*.

Załóżmy dalej, że zmienne losowe f_n są niezależne i mają rozkład ν na Λ. Wtedy miara $\mathcal{P}$ przeniesiona na $\Lambda^{\mathbb{Z}}$ jest po prostu miarą produktową $\nu^{\mathbb{Z}}$. Proces taki nazywamy *procesem Bernoulli'ego*. Procesów takich jest tyle, ile jest miar probabilistycznych na zbiorze skończonym Λ.

2. Niech X bedzie przestrzenią metryczną zwartą, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym (ewentualnie homeomorfizmem). Wtedy (X, T) jest *topologicznym układem dynamicznym* z czasem dyskretnym $\mathbb{N}_0$. Jeśli T jest homeomorfizmem to można rozważać działanie z czasem $\mathbb{Z}$. Twierdzenie mówi, że wtedy istnieje przynajmniej jedna miara probabilistyczna μ określona na zbiorach borelowskich $\mathcal{B}$, niezmienicza dla T. Innymi słowy, T jest transformacją zachowującą miarę μ, albo jeszcze inaczej, $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ jest miarowym układem dynamicznym. Dowód istnienia miary niezmienniczej μ jest poniżej

Każdy miarowy układ symboliczny można traktować, jako szczególny przypadek układy topologicznego: przestrzeń $\Lambda^{\mathbb{Z}}$ ($\Lambda^{\mathbb{N}_0}$) posiada naturalną metrykę produktową, transformacja ,,shift" jest ciągła (dla $\mathbb{Z}$ jest ona homeomorfizmem). Układ tem posiada wiele miar niezmienniczych – każda z nich reprezentuje inny miarowy układ dynamiczny (czy też proces). Na przykład miara produktowa $\nu^{\mathbb{Z}}$ (ν – dowolna miara probabilistyczna na zbiorze skończonym Λ) reprezentuje pewien proces Bernoulli'ego. Ale istnieje jeszcze mnóstwo innych miar niezmienniczych! Przykłady pojawią się przy różnych okazjach.

3. Niech G będzie grupą topologiczną zwartą. Wtedy istnieje jedyna miara probabilistyczna μ (tzw. miara Haara) niezmiennicza na mnożenie lewostronne, tzn. na przekształcenie $\phi_h : g \to hg$ (h dowolny ustalony element G). Wtedy otrzymujemy układ dynamiczny $(G, \mathcal{B}, \mu, \phi_h)$ z czasem G. Ogranioczając się do potęg jednego elementu h (dodatnich i ujemnych) otrzymamy układ z czasem dyskretnym

$\mathbb{Z}$. Przykładem takiego działania są obroty (zespolonego) okręgu jednostkowego z miarą Lebesgue'a.

Inne działa nie otrzymamy biorąc za transformację ciągły homomorfizm (lub automorfizm) $T : G \to G$. Ponieważ T przeprowadza miarę μ na miarę również lewostronnie niezminenniczą (bo T jest homomorfizmem), to z jedyności takiej miary wynika, że jest to miara μ, czyli, że T zachowuje miarę μ. Przykładem takiego działania jest z^2 na okręgu jednostkowym.

Twierdzenie. Bogoliubow-Kryłow

(zob. *http://en.wikipedia.org/wiki/Krylov-Bogolyubov_theorem*)

Każdy topologiczny układ dynamiczny (X, T), gdzie X jest przestrzenią metryczną zwartą, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym, posiada (co najmniej jedną) borelowską probabilistyczną miarę T-niezmienniczą μ.

Dowód. Ustalmy jakikolwiek punkt $x \in X$ i rozważmy ciąg miar probabilistycznych

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i x}.$$

Z tw. Riesza miary te są funkcjonałami na $C(X)$. Są to funkcjonały nieujemne. Wtedy ich norma jest równa wartości na funkcji tożsamościowej 1. Zatem ta norma wynosi 1, a więc miary te należą do domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni funkcjonałów. Z tw. Banacha-Alaoglu

(zob. *http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Banacha-Alaoglu*)

kula ta jest zwarta w topologii *-słabej. Zatem ciąg μ_n ma podciąg μ_{n_k} zbieżny do pewnego funkcjonału μ. (Uwaga! Jeśli X jest metryzowalna, to $C(X)$ jest ośrodkowa, a co za tym idzie topologia *-słaba na przestrzeni sprzężonej jest metryzowalna. Dlatego właśnie istnieje podciąg (a nie podnet) zbieżny.) Z tw. Riesza (teraz stosowanego w drugą stronę) μ jest miarą borelowską znakowaną na X. Ponieważ przejście do granicy w topologii *-słabej zachowuje nieujemność i wartość osiąganą na funckji tożsamościowej 1, wnisokujemy, że μ jest miarą probabilistyczną. Pozostało sprawdzić niezmienniczość. Znowu wygodniej myśleć, że jest to funcjonał i sprawdzić że $\mu(f) = (T\mu)(f)$. Elementarnie sprawdza się, że $(T\mu)(f) = \mu(f \circ T)$ (warunek ten najpierw sprawdza się w wprost z definicji miary $T\mu$ jako przeniesienia miary μ „przez przeciwobraz" dla funkcji charakterystycznych zbiorów, następnie wnioskuje się go dla funckji prostych, a dalej mierzalnych – w szczególności dla funkcji ciągłych – patrz zadania). A więc obliczmy $\mu(f \circ T)$ dla funkcji ciągłej.

Ponieważ $f \circ T$ też jest ciągła, więc z definicji zbieżności *-słabej mamy

$$
\begin{aligned}
\mu(f \circ T) = \lim_k \mu_{n_k}(f \circ T) \\
&= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{T^i x}(f \circ T) = \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (f \circ T)(T^i x) \\
&= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^{i+1} x) = \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(T^i x) \\
&= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i x) + \lim_k \frac{f(T^{n_k} x) - f(x)}{n_k} = \\
&\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{T^i x}(f) + \lim_k \frac{f(T^{n_k} x) - f(x)}{n_k} = \mu(f) + 0 = \mu(f).
\end{aligned}
$$

Ostatnia zbieżność do zera wynika z tego, że $|f(T^{n_k} x)| \leq \|f\| < \infty$. Zatem μ jest miarą niezmienniczą. $\square$

Następnym razem:
Homomorfizm i izomorfizm miarowy układów, przykłady

Ergodyczność i twierdzenie ergodyczne
Ta część wykładu będzie powtórzeniem ostatniego wykładu z teorii miary. Powtarzam to ze względu na nowe osoby, które nie chodziły na tamten kurs.

Tomasz Downarowicz